I. ULUSAL HAVACILIK VE UZAY KONFERANSI UHUK-2006-076
21-23 Eylül 2006, ODTÜ, Ankara

YAPISAL OLMAYAN ÇÖZÜM AĞLARINDA YÜKSEK MERTEBELİ KAPALI SIKIŞAMAZ NAVIER-STOKES AKIŞ ÇÖZÜCÜSÜNÜN GELİŞTİRİLMESİ

Onur BAŞ*
Ortadoğu Teknik Üniversitesi,
ANKARA

Ali Ruhşen ÇETE†
Turbotek Ltd. Şti.,
ANKARA

İsmail H. TUNCER ‡
Ortadoğu Teknik Üniversitesi,
ANKARA

ÖZET

Bu çalışmada yeni geliştirilen ve yapısal olmayan çözüm ağlarında kapalı bir formülasyon şeması olan Değişen Ardışık Hücre Yönlü Kapalı Formülasyonu (DAHYKF) kullanan sıkışamaz Navier-Stokes çözücüsü üzerinde, değişik mertebelerde yeniden değişken oluşturma şemalarının çözüm hassasiyetine etkileri incelenmiştir. Kullanılan DAHYKF çözüm yöntemi, hücresel gevşeme yöntemi ile karşılaştırılmıştır. Yeniden değişken oluşturma şemalarını test etmek için düşük Reynolds sayılı tek elemanlı NACA 0008 kanat profilinin ve iki elemanlı NLR 7301 kanat profilinin seçildiği bu çalışmada, birinci, ikinci ve üçüncü dereceden (U-MUSCL) yeniden değişken oluşturma şemalarının değişik çözüm ağlarında hata oranları karşılaştırılmış ve değişen U-MUSCL parametresinin sayısal hataya etkisi incelenmiştir. DAHYKF ve hücresel gevşeme şemalarının çözüm zamanı ve yakınsama adım sayısına etkisinin incelenmesi için ise NACA 0008 kanat profili çevresinde oluşturulan yapısal ve yapısal olmayan çözüm ağları seçilmiştir. Elde edilen sonuçlarla DAHYKF kapalı çözüm yönteminin, kapalı hücresel gevşeme yönteminden, hesaplama zamanı açısından seçilen yapısal ağda %22.5, yapısal olmayan ağda ise %18 daha verimli olduğu gösterilmiştir.

GİRİŞ

Havacılık alanında yapılan Hesaplamalı Akışkanlar Dinamiği (HAD) çalışmaları göz önüne alındığında, insansız hava araçlarının kullanım alanlarının yaygınlaşması ve havacılık sektöründeki değerlerinin ispatlanmasıyla birlikte, düşük hız ve düşük Reynolds sayılarında hesaplama gerektiren sıkışamaz akışlar ve bu akışların çözümü önem kazanmıştır. Bu sebeple hızlı ve kararlı sıkışamaz akış çözücülerine olan ihtiyaç artmaktadır. Aynı zamanda, elde edilen çözümün kullanılabilirliğini belirleyen hassasiyet mertebesi, sayısal çözüm yöntemleri için çok önemlidir. Bu amaç için geliştirilen, yapısal veya yapısal olmayan dörtgen çözüm ağlarını ve yapay sıkışabilirlik yöntemine göre değiştirilmiş sıkışamaz N-S denklemlerini [9] kullanan çözücü üzerinde, DAHYKF zaman adımı yöntemi kullanılarak hızlı ve kararlı bir yapı oluşturulurken, MUSCL şemasının yapısal olmayan çözüm ağlarına uyarlanmış şekli olan U-MUSCL (Unstructured-Monotone

* Yüksek Lisans Öğrencisi, Havacılık ve Uzay Müh. Böl., E-posta: obas@ae.metu.edu.tr
† Dr., Uzman, E-posta: arcete@turbotek-tr.com
‡ Prof. Dr., Havacılık ve Uzay Müh. Böl., E-posta: tuncer@ae.metu.edu.tr

Upstream-Centered Scheme for Conservation Laws) [2] yöntemi kullanılarak hassasiyet mertebesi arttırılmıştır.

AKIŞ ÇÖZÜCÜSÜ

Sıkışamaz akış varsayımı yapıldığında, kütlenin korunumunu temsil eden süreklilik denklemi karakter değiştirerek hiperbolik yapıdan eliptik yapıya geçmektedir. Değişik karakterdeki denklemleri içeren bu denklem sisteminin sayısal çözümü zor olduğu için uygulanan değişik çözüm yöntemleri vardır. Bu amaçla geliştirilmiş yöntemler temel olarak üç kategori altında incelenebilir. İlk kategoriyi Vortisite-Akım fonksiyonu yöntemi oluşturmaktadır. İkinci kategori, MAC (Marker and Cell) yönteminin [10], projeksiyon yöntemlerinin [8], ve yaygın kullanılan SIMPLE ve benzerlerinin [7] içinde bulunduğu, genellikle basınç Poisson denklemlerinin çözüldüğü basınç temelli yöntemlerdir. Son kategori ise ilk olarak Chorin [9] tarafından ortaya atılan ve öz kütle temelli yöntemlere benzeyen yapay sıkışabilirlik yöntemidir. Vortisite-Akım fonksiyonu yöntemi iki boyutta verimli olmasına rağmen üç boyuta çıkarılması oldukça zordur. Basınç temelli yöntemlerin ise verilen sınır şartlarına olan hassasiyeti yüksektir ve poisson denklem çözümünün oldukça zaman alması sebebiyle bazı koşullarda çözüm zamanı açısından verimliliği düşük olmaktadır. Bu çalışmada yapay sıkışabilirlik yöntemi kullanılmış ve bu yönteme göre değiştirilmiş denklem sistemi aşağıda verilmiştir.

$$A\frac{\Delta\overline{Q}}{\Delta t}+\oint\left(E\partial y-F\partial x\right)=\left[G\right]\oint\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\partial y-\frac{\partial Q}{\partial y}\partial x\right)$$

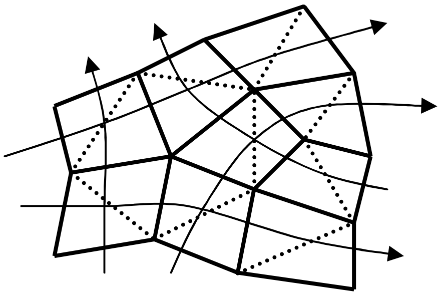
$$Q=\begin{bmatrix}P\\u\\v\end{bmatrix}\qquad E=\begin{bmatrix}\beta u\\u^2+P\\u.v\end{bmatrix}\qquad F=\begin{bmatrix}\beta v\\u.v\\v^2+P\end{bmatrix}\qquad [G]=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1/\mathrm{Re}&0\\0&0&1/\mathrm{Re}\end{bmatrix}$$

Bu denklem sisteminde yer alan β sembolü yapay sıkışabilirlik parametresini temsil eder ve bu çalışmada alınan çözümlerde sabit olarak “1” değeri kullanılmıştır. Bu formüllerde görülen akı terimleri taşınım ve yayınım terimleri olarak ikiye ayrılabilir. Taşınım terimlerinde akı vektörü bölme yöntemleri uygun olmadığı için [5] Roe akı farkı bölme yöntemi, yayınım terimlerinde ise merkezi türev alma yöntemleri uygulanmaktadır.

Yukarıda verilen akış denklemlerinin ayrıklaştırılabilmesi için çözüm ağına ihtiyaç duyulmaktadır. Temel olarak ikiye ayrılabilen çözüm ağlarından veri yönetimi daha zor olmasına rağmen karmaşık geometrilere daha kolay uygulanabilmesi sebebi ile yapısal olmayan ağlar öne çıkmaktadır.

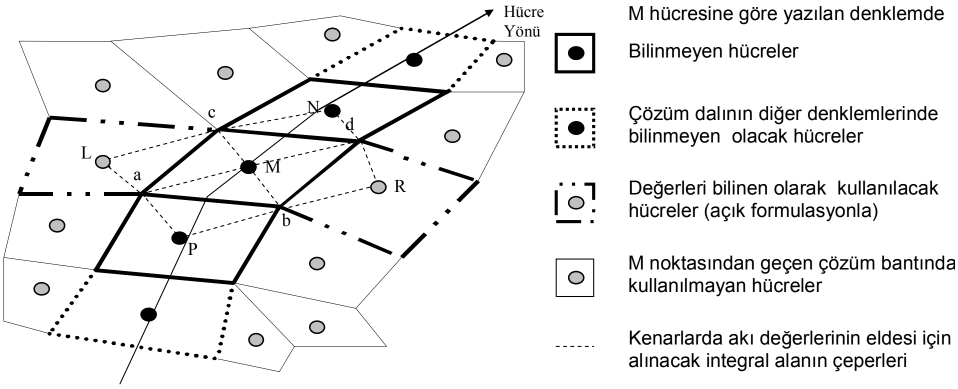
Zaman adımı için ise temel olarak açık ve kapalı olmak üzere iki farklı yapı kullanılabilir. Açık yapıya sahip olan ayrıklaştırmalar uygulama kolaylığı ve adım bilgisayar zamanı açısından avantajlı olurken kararlılık ve çözüm ağına bağlılık açısından sorunludur. Kapalı formülasyona sahip olanlar ise kararlılık açısından güçlü olmasına rağmen her adımda gerçekleşen matris çözümleri, fazla zaman alıcı olmakta ve bazen çözülemeyecek kadar büyük matrisler oluşabilmektedir. Bunun yanında yapısal çözüm ağlarında kullanılan hızlı kapalı formülasyonlar geliştirilmiştir. Bu çalışmada, yapısal olmayan çözüm ağlarında da kullanılabilen bir hızlı kapalı formülasyon türü olan Değişken Ardışık Hücre Yönlü Kapalı Formülasyonun (DAHYKF) [3] sıkışamaz Navier-Stokes denklemlerine uygulanmış versiyonu kullanılmıştır[1] .

DAHYKF yönteminin temelinde ardışık hücre yönü kavramı bulunmaktadır. Çift sayıda kenara sahip hücrelerde karşılıklı kenarlardan (ya da yüzlerden) geçen yönler tanımlamak mümkündür. Bu tip hücrelere sahip bir ağ yapısında birbirini izleyen hücrelerin yönlerini birleştirerek Şekil 1’de görüldüğü gibi “ardışık hücre yönleri” (Sequential Cell Directions) elde etmek mümkündür. Tek bloklu yapısal ağlarda Ardışık Hücre Yönleri eğrisel koordinatlarla aynı olacaktır. Yapısal olmayan ağlarda ise bu yolla bir yön yapısı oluşturmak ve bu yapıdan yararlanarak çizgisel gevşeme benzeri çözüm yöntemleri uygulamak mümkündür.



Şekil 1. Yapısal olmayan çözüm ağlarında tanımlanan çözüm bantlarına örnek

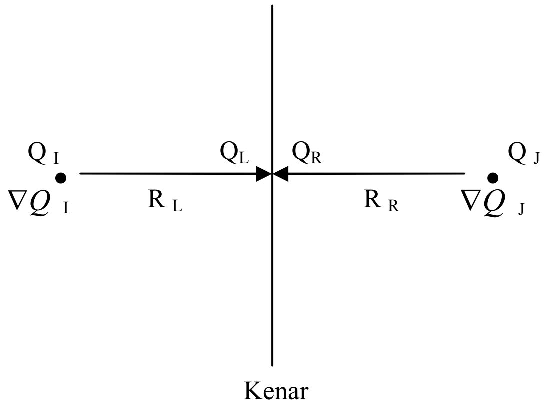
DAHYKF yöntemi ardışık hücre yönlerinde kapalı formülasyon uygulamak suretiyle üç bantlı katsayılar matrisine sahip denklem sistemleri oluşturup bunları çözmektedir. Şekil 1'de çözüm yönleri temsili olarak gösterilmekte Şekil 2'de ise yöntemin şemasını açıklamak için hücre yönlerinin birinde kapalı formülasyon uygulanan bir hücre merkezi gösterilmektedir. Yöntem, yapısı gereği dörtgen elemanlar içeren çözüm ağları kullanmaktadır. Dörtgen elemanlı yapısal olmayan çözüm ağları yaygın olmamakla birlikte üçgen elemanlı çözüm ağları kolaylıkla dörtgen elemanlı hale dönüştürülebilmektedir.



Şekil 2. Tanımlanan bir hücre yönünde kapalı formülasyon uygulanışı

YENİDEN DEĞİŞKEN OLUŞTURULMASI

Sonlu hacimler yöntemlerinde kenar üzerinde akı hesaplanırken kullanılan, Roe yönteminin tanımında da geçen ve Şekil 3'de gösterilen kenarın sol ve sağında yeniden oluşturulan akış değişkenlerinin oluşturulma şekli sayısal şemanın hassasiyetini belirler.



Şekil 3:Kenar Üzerinde Akı Gösterimi

Uygulaması diğerlerine göre kolay olan birinci derece hassasiyet için sol ve sağdaki akış değişkenleri buralardaki hücre değerlerine eşit kabul edilir. Birinci derece yeniden değişken oluşturulmasının yayılım karakteri çok güçlü olduğu için bu yapı ile elde edilen sonuçlar, büyük sayısal hatalar içermektedir.

Yapısal olmayan çözüm ağlarında ikinci derece hassasiyete sahip çözümlerin elde edilmesi için ise en yaygın kullanılan yöntem parçalı doğrusal yeniden değişken oluşturulmasıdır. Formülü aşağıda verilen bu yapıda hesaplanması gereken ∇Q ise Green-Gauss teoremi yardımıyla veya en küçük kareler yöntemi ile hesaplanabilir.

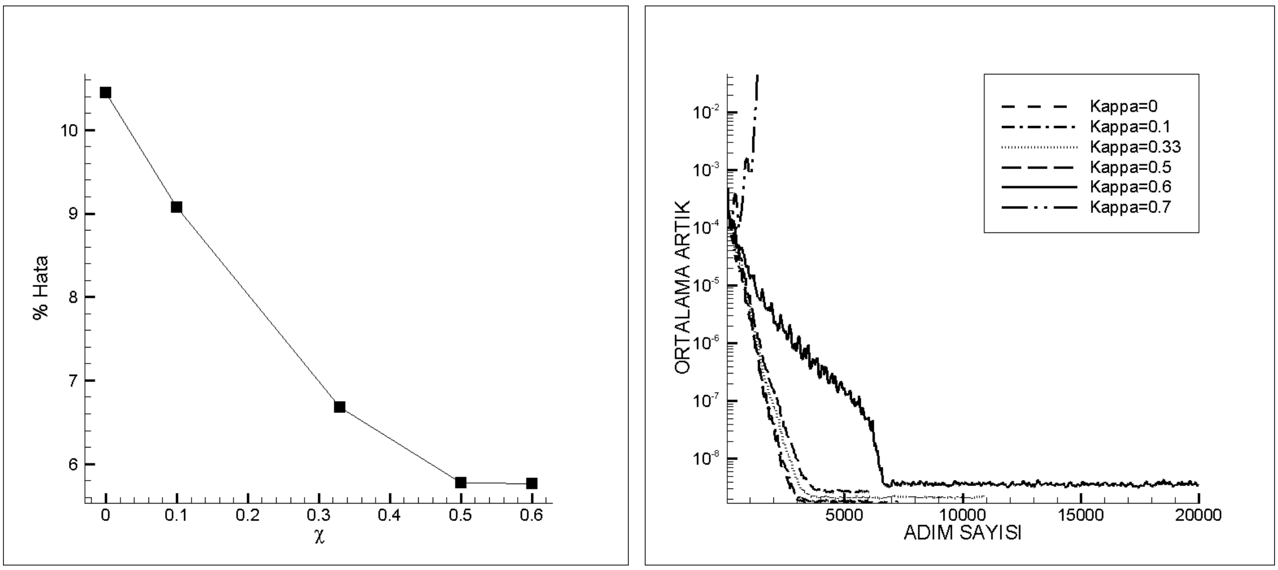
$$Q_L = Q_i + \nabla Q_i . R_L$$

Yapısal olmayan çözüm ağlarında üçüncü derece hassasiyete sahip çözümlerin elde edilmesi için ise literatürde yer alan U-MUSCL [2] şeması tercih edilmiştir. Yapısal ağlarda en yaygın kullanılan yöntemlerden biri olan MUSCL şemasında, kullanılan nokta sayısını arttırmadan, kenarda parçalı doğrusal yeniden değişken oluşturulmasında kullanılan ve soldan veya sağdan alınan bilgilere ek olarak karşı tarafın değişken değeri de kullanılarak hassasiyet derecesi arttırılmaktadır. Aynı temel yapıya sahip olan U-MUSCL şeması da MUSCL gibi tek parametreli, değişken hassasiyet mertebeli bir şemadır ve seçilen χ değerlerine göre değişik hassasiyet, dolayısı ile değişik yayılım hataları oluşturulabilir. Formülasyonu aşağıda verilen U-MUSCL yeniden değişken oluşturulmasında χ =0 için parçalı doğrusal yeniden değişken oluşturulmasına eş bir yapı elde edilmektedir.

$$Q_L = Q_i + \frac{\chi}{2}\left(Q_j - Q_i\right) + \left(1-\chi\right)\nabla Q_i . R_L$$

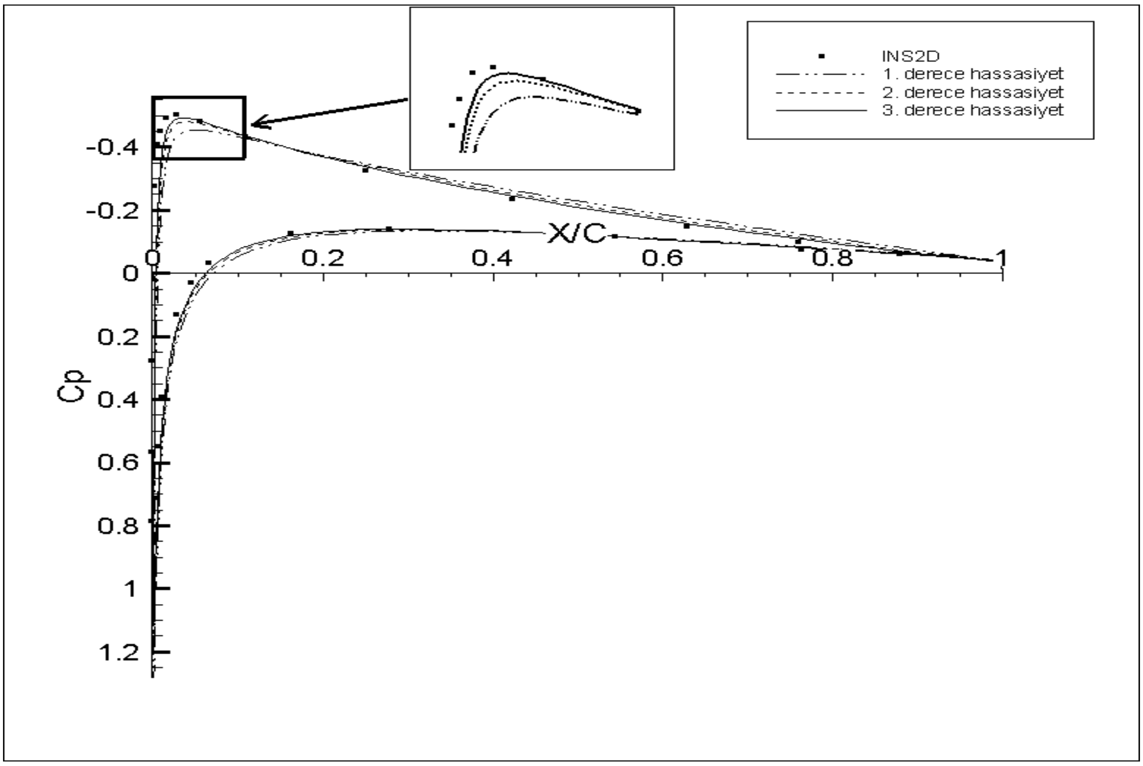
SONUÇLAR ve YORUMLAR

Yapısal olmayan çözüm ağları ve sıkışamaz N-S denklemleri için birinci, ikinci ve üçüncü mertebeden yeniden değişken oluşturulmasının incelenmesinde, tek parametreli, değişken hassasiyet mertebeli bir şema olan U-MUSCL değişik χ değerleri ve değişik çözüm ağlarında test edilmiştir. Bu çalışma süresince alınan çözümlerde CFL değeri 10^{12} olarak alınmıştır. NACA 0008 kanat profili, 6000 Reynolds sayısı ve 2 derece hücum açısı için değişik χ değerleri alınarak 260x40 yapısal ağ üzerinde elde edilen sonuçların hata miktarları ve yakınsama grafikleri Şekil 4'te gösterilmiştir.



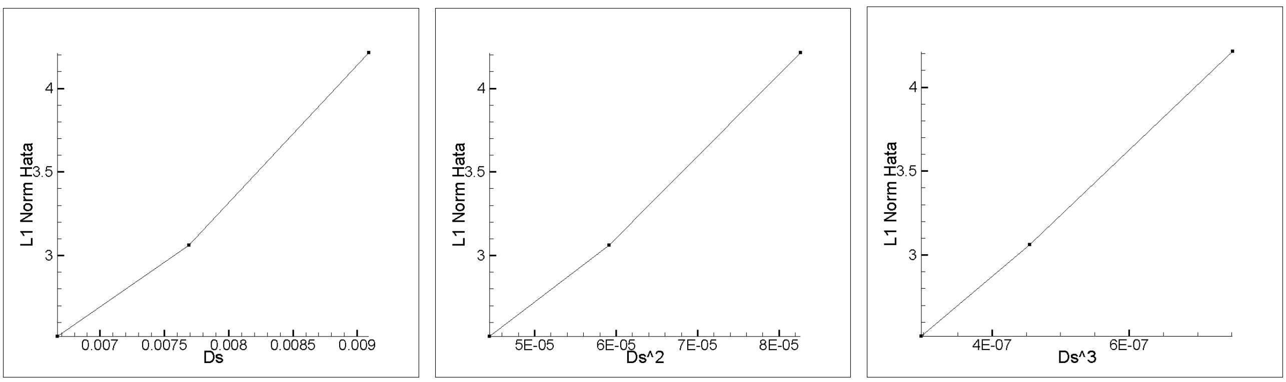
Şekil 4: Hata Oranının U-MUSCL Değişkeni Olan χ ile Değişimi ve Değişik χ Değerlerinde Yakınsama Karakterleri

Şekil 4'te verilen sonuçlar göz önüne alınarak en az sayısal hata oluşumuna sebep olan χ değeri 0.6 olarak belirlenmekle birlikte 0.5 ve 0.6 değerleri için birbirine çok yakın sayısal hata değerlerine ulaşılmıştır. Yakınsama karakterinin χ değeri ile değişimine bakıldığında ise 0.5 değeri 0.6 değerine göre çok avantajlıdır. χ'nın 0.7 seçildiği durumda ise yakınsama elde edilememiştir. Hassasiyet ve kararlılık açısından en uygun olduğuna karar verilen χ =0.5 değerinin yanında birinci (parçalı sabit yeniden değişken oluşturulması) ve ikinci dereceden hassasiyet (parçalı doğrusal yeniden değişken oluşturulması) kullanılarak 260x40 yapısal ağda elde edilen sonuçlarda hassasiyetin basınç katsayısı üzerindeki etkisi görsel olarak Şekil 5'de verilmiş.



Şekil 5: Sayısal Hata Miktarının Basınç Katsayıları Üzerinde Görsel Karşılaştırılması

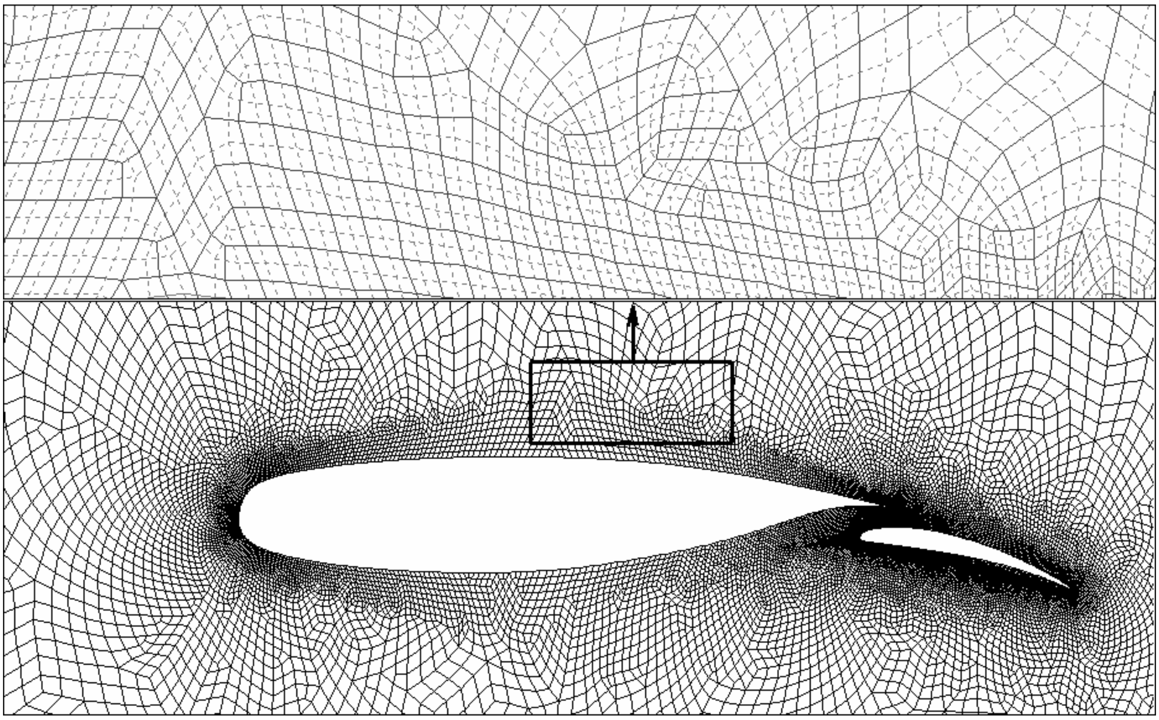
χ'nın 0.5 değeri için 220x30, 260x40 ve 300x50 olmak üzere üç değişik çözüm ağında alınan sonuçlarda, hata oranının karakteristik uzunluk, bu uzunluğun karesi ve küpüyle değişimi Şekil 6'da verilmiştir.



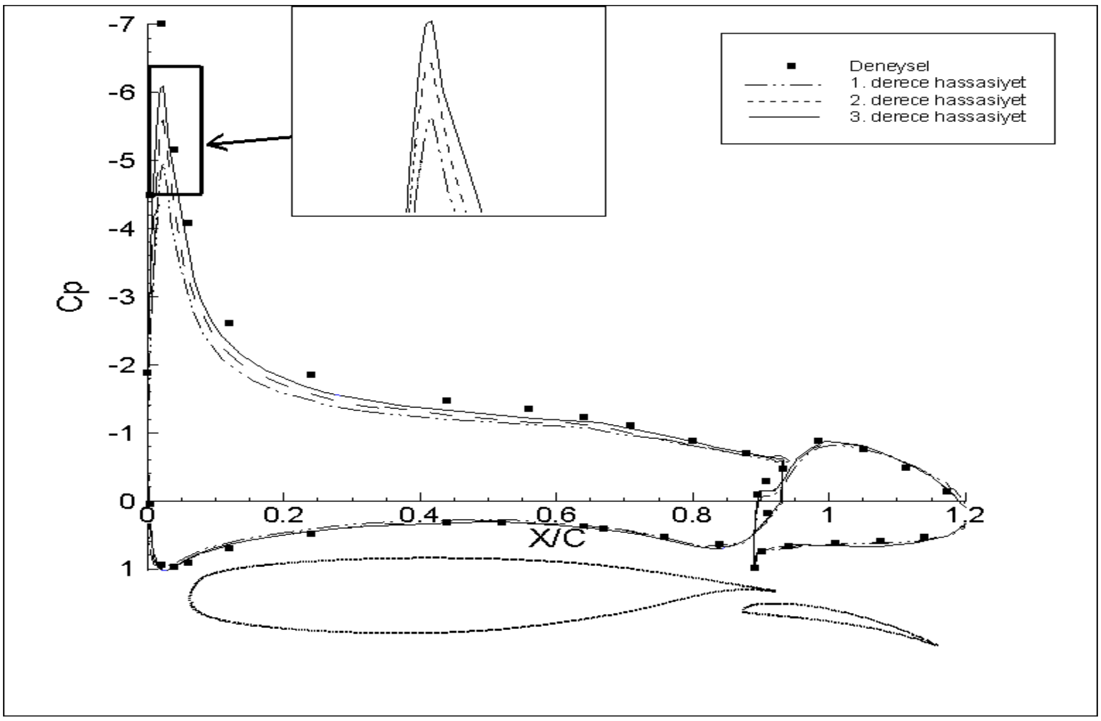
Şekil 6: Hata Oranının Karakteristik Uzunluk, Uzunluğun Karesi ve Küpü ile Değişimi

Şekil 6'da verilen grafikte hata mertebesinin karakteristik uzunluğun küpü ile doğrusal olduğu görülmektedir. Literatürde üçüncü derece hassasiyete sahip olduğu analitik olarak ispatlanan [2] χ =0.5 değerinin hassasiyeti sayısal olarak da ispatlanmıştır.

Değişik mertebelerdeki yeniden değişken yapılandırma şemalarının kullanılması yoluyla yapısal olmayan çözüm ağlarında alınan sonuçların karşılaştırılması için ise Şekil 7'de verilen çözüm ağı ve NLR 7301 iki elemanlı kanat profili çevresinde 2.51×10^6 Reynolds sayısı ve 6 derece hücum açısı seçilmiştir. Şekil 7'de aynı zamanda seçilen bir bölgede yer alan çözüm bantları da kesikli çizgi ile gösterilmiştir. Elde edilen sonuçların deneysel verilerle [6] karşılaştırılması Şekil 8'de gösterilmiştir. Şekil 8'de görüldüğü üzere yapısal olmayan ağlarda da artan hassasiyet, sonuçların önemli derecede deneysel verilere yaklaşmasını sağlamaktadır.

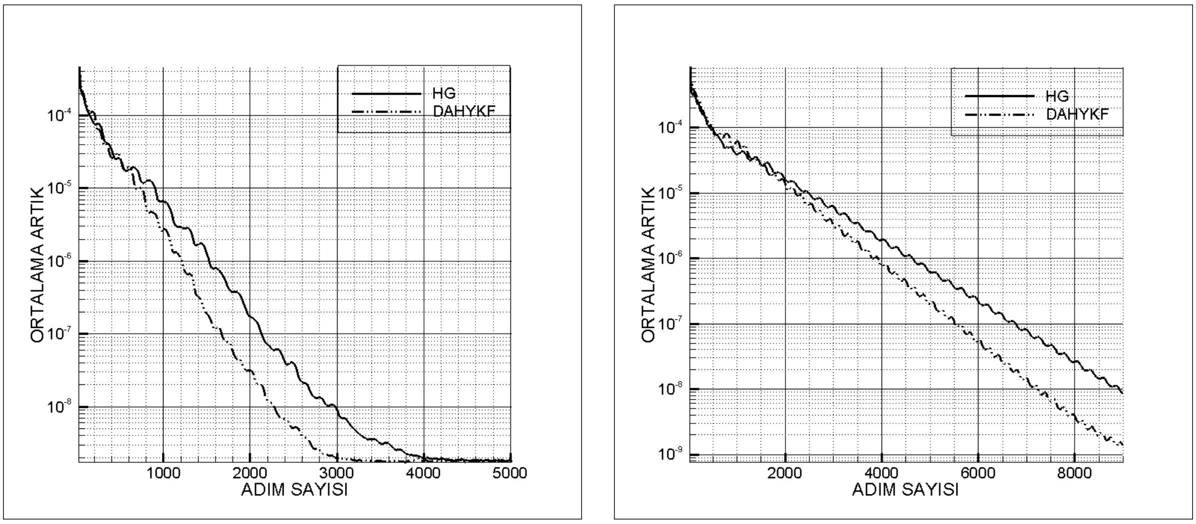


Şekil 7: NLR 7301 Çevresindeki Yapısal Olmayan Çözüm Ağı ve Seçilen Bölgedeki Çözüm Bantları



Şekil 8: NLR 7301 Çevresindeki Basınç Katsayısı Dağılımının Değişik Hassasiyet Mertebelerinde Deneysel Veri İle Karşılaştırılması

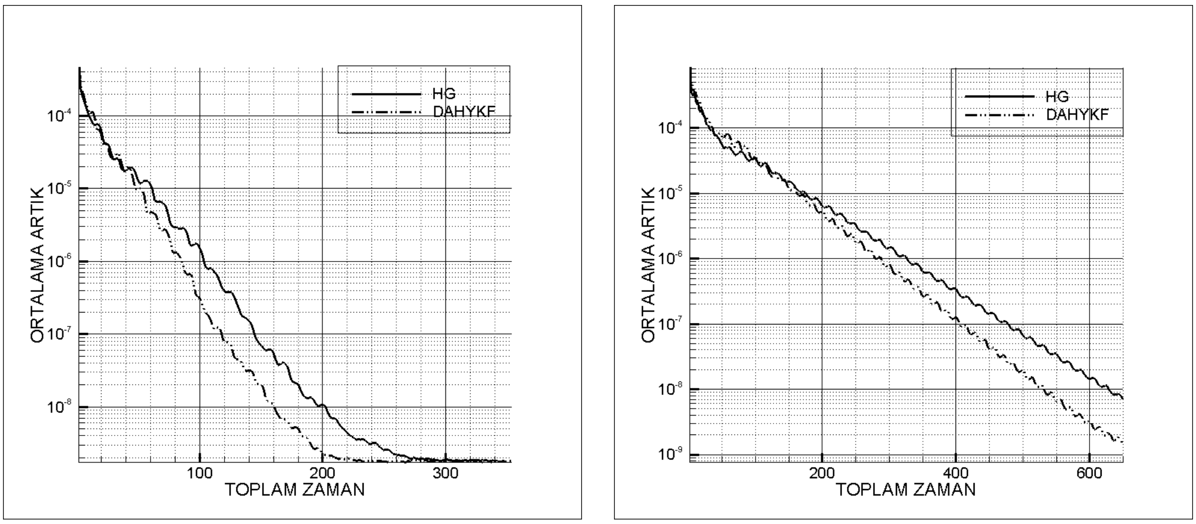
DAHYKF yönteminin yapısal olmayan çözüm ağlarında yaygın kullanılan hücresel gevşeme (HG) yöntemi ile karşılaştırılması için ise yakınsama adım sayısının ve toplam çözüm zamanının NACA 0008 profili çevresinde 6000 Reynolds sayısı ve 2° hücum açısı için yapısal (260x40) ve yapısal olmayan (10360 noktalı) çözüm ağlarında değişimi incelenmiştir. CFL değerinin 10^{12} olarak alındığı bu çözümlerde, yakınsama adım sayısında, yapısal çözüm ağlarında %26, yapısal olmayan ağlarda ise %23 azalma gözlenmiş ve ortalama artık-adım sayısı grafikleri Şekil 9'da verilmiştir.



Yapısal Çözüm Ağı Yapısal Olmayan Çözüm Ağı

Şekil 9: Ortalama Artık-Adım Sayısı Grafikleri

Toplam yakınsama bilgisayar süresi göz önüne alındığında ise yapısal çözüm ağlarında %22.5, yapısal olmayan çözüm ağlarında %18 azalma gözlenmiştir. AMD 64-bit 3000+ işlemci ve 1.0 Gb hafıza kullanılarak elde edilen ortalama artık-çözüm süresi grafikleri Şekil 10'da verilmiştir.



Yapısal Çözüm Ağı Yapısal Olmayan Çözüm Ağı

Şekil 10: Ortalama Artık-Çözüm Zamanı Grafikleri

Kaynaklar

[1] Baş O., Çete A.R. and Tuncer İ.H., "Yapısal Olmayan Çözüm Ağlarında Ardışık Hücre Yönlü Kapalı Formülasyon Kullanan Sıkışamaz Navier Stokes Çözücüsü Geliştirilmesi", Hasem, 2006

[2] Burg C., "Higher Order Variable Extrapolation for Unstructured Finite Volume RANS Flow Solver", 17. AIAA Comp. Fluid Dynamics Conference Toronto, 2005

[3] Çete, A.R, "Değişen Hücre Yönlü, Kapalı Formülasyonlu Yöntem", İTÜ Uçak Mühendisliği Doktora Tezi, 2004

[4] Mueller, T.J., "Fixed and Flapping Wing Aerodynamics for Micro Air Vehicle Applications", 2001

[5] Toro, E.F., "Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics, A Practical Introduction", 1999

[6] Agard AR 303, "A Selection of Experimental Test Cases for the Validation of CFD Codes", 1994

[7] Patankar, S.V. and Spalding, D.B., "A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer," Intl. Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 15, pp. 1787-1806, 1972

[8] Chorin, A.J., "Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations", Math. Comp, 22: 742-762, 1968

[9] Chorin, A.J., "A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems", J. Comp. Phy., Vol. 2, pp. 12, 1967

[10] Harlow, F.H. and Welch, J.E., "Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow with Free Surface", Physics of Fluids, Vol. 8, pp. 2182-2189, 1965